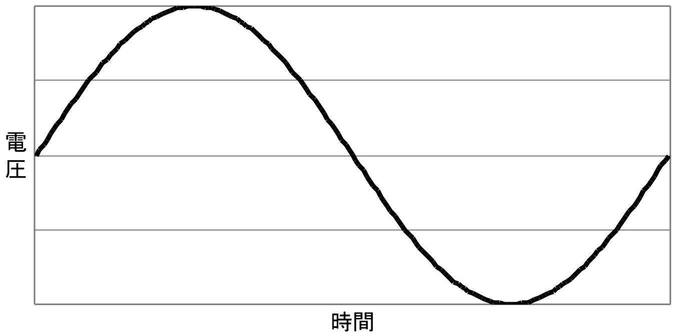
交流の実効値は最大値の$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍になることを証明する。

正弦波の交流の電圧の瞬時値は$e = \sin(2\pi ft + \varphi)$のような表現を用いますが、今回は電気のことを知らない高校生でも理解できるように記述しました。（積分は必要）

直流と交流の違い

・直流は電圧と電流の流れる向きも一定である。（乾電池など）

・交流は時間と共に電圧と電流の流れる向きが変化する。(家庭用電源など　下図参照）



実効値について

交流は時々刻々と電圧が変化しますが家庭用の電源はなぜ100Vというのでしょうか？

簡単な例で言うと電球に100Vの直流を流したときの明るさと同じ明るさになったときの交流の電圧を100Vと定義し、これを実効値といいます。

つまり、仕事率が同じであるということです。

電気の仕事率はW（ワット）で表されます。

中学で勉強したオームの法則などの知識を使います。

$$P = IE = \frac{E}{R} \cdot E = \frac{E^2}{R}$$

直流の場合には上式を用いて簡単に計算できますが、交流の場合は、時間と共に電圧が変化するので、上式のように簡単にはいきません。

電圧の最大値をEmとすると、∠θのときの電圧は$Em \cdot \sin\theta$になります。これを0からπまで積分し、πで割れば平均値が求まり、これが実効値となります。

http://www.dsc11.com/

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(Em\sin\theta)^2}{R}d\theta$$

$$= \frac{Em^2}{\pi R}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cdot d\theta$$

$$= \frac{Em^2}{\pi R}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

ここで$2\theta=\alpha$ とすると$\theta=\frac{\alpha}{2}$となる。よって$d\theta=\frac{1}{2}d\alpha$　これを上式に代入すると

$$\frac{Em^2}{\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\cdot\frac{1}{2}d\alpha$$

$$= \frac{Em^2}{4\pi R}\int_0^{2\pi}(1-\cos\alpha)d\alpha$$

$$= \frac{Em^2}{4\pi R}[\alpha-\sin\alpha]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{Em^2}{4\pi R}\{(2\pi-\sin 2\pi)-(0-\sin 0)\}$$

$$= \frac{Em^2}{4\pi R}\{(2\pi-0)-(0-0)\}$$

$$= \frac{Em^2}{4\pi R}\cdot 2\pi$$

$$= \frac{Em^2}{2R}$$

$$P = IE = \frac{E}{R}\cdot E = \frac{E^2}{R} = \frac{Em^2}{2R}$$

$$\therefore\quad E^2 = \frac{Em^2}{2}$$

よって　$E=\frac{Em}{\sqrt{2}}$ となり、命題通り実効値（E）は最大値（Em）の$\frac{1}{\sqrt{2}}$となる。